Translation of ***Divisibility Tests by Powers of 2*** : **Majid Shaikh** From Azim Premji University At Right Angles_Vol.4 No.2_July, 2015

2 की घात से विभाज्यता का परीक्षण

मजीद शेख

मुख्य शब्द : *विभाज्यता, अंक, स्थानीय मान, 10 की घात, भाजक, भागफल, शेष*

2 की घात द्वारा विभाज्यता के लिए एक प्रसिद्ध परीक्षण है : किसी संख्या M की 2^n से विभाज्यता का परीक्षण करने के लिए, हम पहले संख्या *M* के आख़िरी n अंकों के साथ एक नई संख्या *M′* का निर्माण करते हैं और इसके बाद यह देखते हैं कि यह नई संख्या (यानी *M′*) 2^n से विभाज्य है या नहीं। यह परीक्षण इस तथ्य के कारण काम करता है कि संख्या M, सिर्फ़ तभी 2^n से विभाज्य हो सकती है जब *M′* भी 2^n से विभाज्य हो। इस तथ्य को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है। इसके लिए मात्र यह अवलोकन पर्याप्त है कि 10^n विभाज्य होता है 2^n से।

इस परीक्षण के परम्परागत तरीक़े में, *M′* की 2^n से विभाज्यता ज्ञात करने के लिए असल विभाजन किया जाता है यानी $M' \div 2^n$ के परिणाम की असल में गणना की जाती है। इसके लिए कोई और शॉर्टकट नहीं हैं। इस नोट के अन्दर हम इस पर प्रकाश डालेंगे कि *M′* की 2^n से विभाज्यता को वास्तविक विभाजन से कम मेहनत में भी ज्ञात किया जा सकता है।

एक नया तरीक़ा

उद्देश्य : किसी दी गई संख्या *M* की 2^n से विभाज्यता का परीक्षण करना। इसके लिए निम्नलिखित चरणों को निष्पादित करते हैं :

- संख्या *M* के आख़िरी *n* अंक लेकर एक नई संख्या *M′* का निर्माण करें।
- संख्या *M′* के *बाईं* ओर से एक बार में एक अंक लें। (संख्या का दायाँ अंक इकाई का अंक है)
- इन अंकों को 2 की बढ़ती हुई घातों से भाग दें, $2^1 = 2$ से प्रारम्भ करें।
- प्रत्येक विभाजन के बाद, केवल शेष को बनाए रखें और इसे *M′* के अगले अंक के बाईं ओर लिखकर एक नई संख्या बनाएँ। इस नई संख्या का प्रयोग अगले भाग के लिए करें।
- इसी प्रक्रिया को अन्तिम अंक तक दोहराएँ।
- यदि अन्तिम प्राप्त शेषफल 0 है, तो *M*, 2^n से विभाज्य है, अन्यथा नहीं।

इस प्रक्रिया को कुछ ठोस उदाहरणों के माध्यम से दर्शाया गया है।

उदाहरण 1. आइए देखें कि क्या *M* = 123456, 8 से विभाज्य है।

यहाँ भाजक 8 = 2^3 है, इसलिए हम केवल अन्तिम तीन अंकों को लेंगे, अर्थात *M′* = 456. इसके बाद के चरण निम्नलिखित हैं :

चरण 1 : 4 को 2^1 = 2 से भाग दें। शेषफल 0 है अत: कोई 'हासिल' नहीं है। अब हम अगले अंक की ओर बढ़ते हैं।

चरण 2 : 5 को 2^2 = 4 से भाग दें। शेषफल 1 है अत: यहाँ 1 'हासिल' है; इसे अगले अंक 6 के बाईं ओर लिखने से संख्या 16 बनती है।

चरण 3 : 16 को 2^3 से भाग दें। यहाँ कोई शेषफल नहीं है। अत: 123456, 8 से विभाज्य है।

उदाहरण 2. आइए देखें कि क्या M = 123456, 16 से विभाज्य है।

यहाँ भाजक 16 = 2^4 है, अत: *M′* = 3456.

चरण 1 : 3 को 2 से भाग दें। यहाँ शेषफल 1 है।

चरण 2 : 14 को 4 से भाग दें। यहाँ शेषफल 2 है।

चरण 3 : 25 को 8 से भाग दें। यहाँ शेषफल 1 है।

चरण 4 : 16 को 16 से भाग दें। यहाँ कोई भी शेषफल नहीं है। अतः 123456, 16 से विभाज्य है।

उदाहरण 3. आइए देखें कि क्या *M* = 110640, 32 से विभाज्य है।

यहाँ भाजक 32 = 2^5 है, अत: *M′* = 10640.

चरण 1 : 1 को 2 से भाग दें। यहाँ शेषफल 1 है।

चरण 2 : 10 को 4 से भाग दें। यहाँ शेषफल 2 है।

चरण 3 : 26 को 8 से भाग दें। यहाँ शेषफल 2 है।

चरण 4 : 24 को 16 से भाग दें। यहाँ शेषफल 8 है।

चरण 5 : 80 को 32 से भाग दें। यहाँ शेषफल 16 है जो शून्य नहीं है।

अतः 110640, 32 से विभाज्य नहीं है। ध्यान दें कि अन्तिम चरण में शेषफल (16) प्राप्त हो रहा है, यह वह शेषफल भी है जो 110640 को 32 से विभाजित करने पर बचता है।

इन उदाहरणों से एल्गोरिद्म की कार्यप्रणाली स्पष्ट हो जानी चाहिए। अंकों को तालिकाबद्ध रूप में व्यवस्थित करके गणना को सर्वोत्तम रूप से किया जा सकता है, लेकिन इसको मुद्रित

रूप की तुलना में हस्तलिखित रूप से करना आसान होता है। यही कारण है कि हमने एल्गोरिद्म की कार्यप्रणाली का उसी तरह वर्णन किया है, जिस तरह हमने इसे किया है।

हम इस एल्गोरिद्म की सत्यता को बाद में साबित करेंगे।

भागफल

यह रोचक है कि इस विधि से भागफल भी ज्ञात किया जा सकता है, परन्तु उसके लिए इस विधि में छोटा-सा संशोधन करना होगा : हम प्रत्येक चरण पर भागफल को बचाकर रखते हैं। फिर, इन आंशिक भागफलों की शृंखला से हम वांछित भागफल ज्ञात कर सकते हैं। हमें बस इतना करना है कि प्रत्येक आंशिक भागफल को 5 से गुणा करें और फिर अगले आंशिक भागफल को इसमें जोड़ें। यही प्रक्रिया हमें अन्त तक करनी है।

प्रारम्भ में हम सिर्फ़ यह दिखा रहे हैं कि $M' \div 2^n$ के भाग में भागफल की गणना कैसे करें? ध्यान रहें कि M' में केवल n अंक हैं।

उदाहरण 4. आइए हम भाग 3456 ÷ 16 में भागफल की गणना करते हैं।

चरण 1 : 3 को 2 से भाग दें। भागफल 1 है और शेषफल 1 है।
चरण 2 : 14 को 4 से भाग दें। भागफल 3 है और शेषफल 2 है।
चरण 3 : 25 को 8 से भाग दें। भागफल 3 है और शेषफल 1 है।
चरण 4 : 16 को 16 से भाग दें। भागफल 1 है और कोई शेषफल नहीं है।

भागफल का क्रम, पहले से शुरू होकर 1, 3, 3, 1 है। तो गणनाएँ हैं :

$$1 \longmapsto (1 \times 5) + 3 = 8 \longmapsto (8 \times 5) + 3$$
$$= 43 \longmapsto (43 \times 5) + 1 = 216.$$

अतः भागफल 216 है।

उदाहरण 5. आइए 23456 ÷ 32 में भागफल की गणना करते हैं।

चरण 1 : 2 को 2 से भाग दें। भागफल 1 है और शेषफल 0 है।
चरण 2 : 3 को 4 से भाग दें। भागफल 0 है और शेषफल 3 है।
चरण 3 : 34 को 8 से भाग दें। भागफल 4 है और शेषफल 2 है।
चरण 4 : 25 को 16 से भाग दें। भागफल 1 है और शेषफल 9 है।
चरण 5 : 96 को 32 से भाग दें। भागफल 3 है और कोई शेषफल नहीं है।

भागफल की श्रृंखला, पहले से शुरू होकर 1, 0, 4, 1, 3 है। तो गणनाएँ हैं:

$$1 \longmapsto (1 \times 5) + 0 = 5 \longmapsto (5 \times 5) + 4$$
$$= 29 \longmapsto (29 \times 5) + 1$$
$$= 146 \longmapsto (146 \times 5) + 3 = 733.$$

अतः भागफल 733 है।

विभाज्यता परीक्षण की व्याख्या

आइए अब समझते हैं कि विभाज्यता परीक्षण क्यों काम करता है? हम दिखाएँगे कि यह स्थानीय मान पद्धति के कारण कैसे काम करता है। हम यह ध्यान देकर शुरू करते हैं कि

- 10, 2 से विभाज्य है लेकिन 4 से नहीं। हालाँकि 20, 4 से विभाज्य है।
- 100, 4 से विभाज्य है लेकिन 8 से नहीं। हालाँकि 200, 8 से विभाज्य है।
- 1000, 8 से विभाज्य है लेकिन 16 से नहीं। हालाँकि 2000, 16 से विभाज्य है।

और इसी तरह आगे भी। सामान्य तौर पर 10^k, 2^k से विभाज्य है लेकिन 2^{k+1} से नहीं। हालाँकि, 2×10^k, 2^{k+1} से विभाज्य है। (जब इस रूप में बताया जाए, तो कारण स्वत: स्पष्ट होना चाहिए, क्योंकि $10^k = 2^k \times 5^k$ और $2 \times 10^k = 2^{k+1} \times 5^k$)

3456 की 16 से विभाज्यता पर विचार कीजिए। हम विभाज्यता अध्ययन में आमतौर पर प्रयुक्त थीम का अनुसरण करते हैं : यदि हम भाज्य में से भाजक के गुणजों को घटाते हैं तो उसकी विभाज्यता प्रभावित नहीं होगी। दूसरे शब्दों में, M की d से विभाज्यता की जाँच के लिए हम d का कोई भी सुविधाजनक मान लेकर $m-qd$ की d से विभाज्यता की जाँच भी कर सकते हैं; घटाया गया भाग qd फिर अप्रासंगिक हो जाता है और इसे दोबारा देखने की ज़रूरत नहीं होती है। इस अवलोकन के साथ ऊपर कही गई बात के साथ जोड़कर हम यह लिख सकते हैं :

3456 = 2000 + 1456
(यहाँ 2000, 16 का गुणज है))
= 2000 + 1200 + 256
(यहाँ 1200, 16 का गुणज है)
= 2000 + 1200 + 240 + 16
(यहाँ 240, 16 का गुणज है)
= 16 का गुणज।

अब इन चरणों की तुलना हम उन चरणों से करेंगे जो हमने 3456 की 16 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए बनाए थे। आसानी से समझने के लिए हम इन दोनों प्रक्रियाओं को आस-पास रखते हैं। प्रत्येक पंक्ति में हमने प्रासंगिक अंक बोल्ड में लिखा है।

चरण 1	3456 = 2000 + **1**456	3 को 2 से भाग दें। यहाँ शेषफल **1** है।

चरण 2	1456 = 1200 + **2**56	14 को 4 से भाग दें। यहाँ शेषफल **2** है।
चरण 3	256 = 240 + **16**	25 को 8 से भाग दें। यहाँ शेषफल **1** है।
चरण 4	16 = 1 × 16	16 को 16 से भाग दें। यहाँ कोई शेषफल नहीं है।

अन्य उदाहरण : आइए जाँच करते हैं कि क्या M = 10640, 32 से विभाज्य है। हमारे पास है :

चरण 1	10640 = 0 + **1**0640	1 को 2 से भाग दें। यहाँ शेषफल **1** है।
चरण 2	10640 = 8000 + **2**640	10 को 4 से भाग दें। यहाँ शेषफल **2** है।
चरण 3	2640 = 2400 + **2**40	26 को 8 से भाग दें। यहाँ शेषफल **2** है।
चरण 4	240 = 160 + **8**0	24 को 16 से भाग दें। यहाँ शेषफल **8** है।
चरण 5	80 = 2 × 32 + **16**	80 को 32 से भाग दें। यहाँ शेषफल **16** है।

हम प्रक्रिया को और अधिक समझाने की कोशिश नहीं करेंगे क्योंकि हमें लगता है कि इन उदाहरणों में पर्याप्त सुझाव हैं, जिनसे कोई भी अपने लिए स्पष्टीकरण या प्रमाण का निर्माण कर सकता है।

भागफल की जाँच का स्पष्टीकरण

अब हम बताते हैं कि भागफल ज्ञात करने के लिए उपरोक्त विधि क्यों कार्य करती है। एक बार फिर, हम सांकेतिक रूप से दो उदाहरणों के माध्यम से इसकी कार्यविधि को समझाएँगे और इसे यहीं पर छोड़ देंगे। इसके लिए हम दो उदाहरणों 3456 ÷ 16 और 23456 ÷ 32 का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 6. आइए 3456 ÷ 16 के भागफल की गणना करें। इसकी कार्यविधि इस प्रकार है।

क्रिया	**भागफल**	**शेषफल**
3 का 2 से भाग	1	1
14 का 4 से भाग	3	2
25 का 8 से भाग	3	1
16 का 16 से भाग	1	0

आंशिक भागफल क्रमशः 1, 3, 3, 1 है। अब देखें –

3456 = 2000 + 1200 + 240 + 16

= (125 + 75 + 15 + 1) × 16

$= (\mathbf{1} \times 5^3 + \mathbf{3} \times 5^2 + \mathbf{3} \times 5^1 + \mathbf{1}) \times 16$

हम अंकों की शृंखला 1, 3, 3, 1 द्वारा निभाई गई भूमिका देख सकते हैं।

उदाहरण 7. आइए भाग 23456 ÷ 32 में भागफल की गणना करें।

क्रिया	भागफल	शेषफल
2 का 2 से भाग	1	0
3 का 4 से भाग	0	3
34 का 8 से भाग	4	2
25 का 16 से भाग	1	9
96 का 32 से भाग	3	0

आंशिक भागफल क्रमशः 1, 0, 4, 1, 3 है। अब देखें :

$$23456 = 20000 + 0 + 3200 + 160 + 96$$
$$= (625 + 0 + 100 + 5 + 3) \times 32$$
$$= (\mathbf{1} \times 5^4 + \mathbf{0} \times 5^3 + \mathbf{4} \times 5^2 + \mathbf{1} \times 5^1 + \mathbf{3}) \times 32.$$

अंकों की शृंखला 1, 0, 4, 1, 3 द्वारा निभाई गई भूमिका स्पष्ट है।

इस प्रकार प्रक्रिया, जो प्रथम दृष्टया रहस्यमय दिखती है, वह तथ्य $10^n = 2^n \times 5^n$ की एक अभिव्यक्ति भर है।

मजीद शेख स्थित थीम कॉलेज ऑफ इंजीनियरिंग बोइसर, ज़िला पालघर से मैकेनिकल इंजीनियरिंग की पढ़ाई कर रहे हैं। उनकी रुचि मैथेमेटिक्स डिज़ाइनिंग एंड सिमुलेशन में है। वे उर्दू शायरी का भी शौक रखते हैं। उनसे 786majidshaikh92@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कृष्ण कुमार वर्मा **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी
कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही